О НАИБОЛЬШИХЪ И НАИМЕНЬШИХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ СУММЪ,

СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ ЗНАЧЕНІЯ ЦѢЛОЙ ФУНКЦІИ И ЕЯ ПРОИЗВОДНЫХЪ.

П. ЧЕБЫШЕВА.

ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ XII-му ТОМУ ЗАПИСОКЪ ИМП. АКАДЕМІИ НАУКЪ.
№ 3.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1867.

ПРОДАЕТСЯ У КОММИССІОНЕРОВЪ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ:

А. Базунова, въ С. П. Б.
И. Глазунова, въ С. П. Б.
Я. А. Исакова, въ С. П. Б.
Эггерса и Комп., въ С. П. Б.
Шмицдорфа, въ С. П. Б.
Н. Киммеля, въ Ригѣ.
Энфянджянца и Комп., въ Тифлисѣ.

Цѣна 25 коп.

Печатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Санктпетербургъ, 30 октября 1867 года.
Непремѣнный Секретарь, Академикъ *К. Веселовскій.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(Вас. Остр., 9 лин., № 12.)

О НАИБОЛЬШИХЪ И НАИМЕНЬШИХЪ ВЕЛИЧИНАХЪ СУММЪ, СОСТАВЛЕННЫХЪ ИЗЪ ЗНАЧЕНІЙ ЦѢЛОЙ ФУНКЦІИ И ЕЯ ПРОИЗВОДНЫХЪ.

§ 1. Наибольшія и наименьшія величины интеграловъ опредѣляются помощію Варіаціоннаго Исчисленія только въ томъ случаѣ, когда видъ неизвѣстныхъ функцій, заключающихся въ интегралахъ, предполагается совершенно произвольнымъ; если же по свойству вопроса видъ неизвѣстныхъ функцій чѣмъ нибудь ограниченъ, опредѣленіе ихъ подъ условіемъ наибольшей и наименьшей величины интеграла или вообще какой либо суммы, составленной изъ ихъ значеній, требуетъ особенныхъ пріемовъ. Здѣсь мы займемся изслѣдованіемъ простѣйшаго изъ этихъ случаевъ, а именно: когда неизвѣстная функція предполагается цѣлою, данной степени, и черезъ эту функцію, ея производныя и независимую перемѣнную всѣ члены разсматриваемой суммы выражаются цѣлою функціею даннаго вида. Случай этотъ особенно замѣчателенъ по своимъ приложеніямъ, такъ какъ имъ, между прочимъ, разрѣшается вопросъ о параболическомъ интерполированіи по *способу наименьшихъ квадратовъ*.

§ 2. Пусть будетъ

$$F(x, y, y', y'', \ldots \ldots)$$

какая нибудь данная цѣлая функція независимой перемѣнной x, неизвѣстнаго полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

и производныхъ его

$$y', y'', \ldots\ldots$$

Изображая черезъ

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$$

рядъ какихъ нибудь величинъ независимой перемѣнной x (для простоты будемъ предполагать всѣ эти величины x различными между собою) и черезъ

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

сумму значеній функціи

$$F(x, y, y', y'', \ldots)$$

при этихъ величинахъ перемѣнной x, мы замѣчаемъ, что величина этой суммы будетъ зависѣть отъ коеффиціентовъ

$$A_0, A_1, \ldots A_l, \ldots A_{m-1}$$

полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

и что значеніе этихъ коеффиціентовъ, при которыхъ сумма

$$\sum F(x, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, опредѣляется по началамъ Дифференціальнаго Исчисленія такими уравненіями:

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', x_i'', \ldots .)}{dA_{m-1}} = 0.$$

А такъ какъ величины

$$A_0, A_1, \ldots \ldots A_l, \ldots A_{m-1}$$

въ выраженіи

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)$$

не находятся отдѣльно отъ функцій $y, y', y'', \ldots .$; то, вообще, опредѣляя производную этого выраженія по A_l, мы получаемъ

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_l} = \sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dA_l} +$$

$$\sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dy_i} \frac{dy_i}{dA_l} + \sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dy_i'} \frac{dy_i'}{dA_l} +$$

$$\sum \frac{d F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots .)}{dy_i''} \frac{dy_i''}{dA_l} + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

По выраженію-же функціи

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

и ея производныхъ

$$y' = 1.A_1 + \ldots + lA_l x^{l-1} + \ldots + (m-1) A_{m-1} x^{m-2},$$

$$y'' = 1.2 A_2 + \ldots + l(l-1) A_l x^{l-2} + \ldots + (m-1)(m-2) A_{m-1} x^{m-2},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ,$$

мы находимъ, что

$$\frac{dy_i}{dA_l} = x_i^l; \quad \frac{dy_i'}{dA_l} = l x_i^{l-1}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l} = l(l-1) x_i^{l-2}, \ldots .$$

Внося эти величины производныхъ

$$\frac{dy_i}{dA_l}, \quad \frac{dy_i'}{dA_l}, \quad \frac{dy_i''}{dA_l}, \ldots .$$

въ вышенайденное выраженіе производной

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l}$$

и изображая, для сокращенія, значенія производныхъ

$$\frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'}, \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''}, \ldots,$$

при какомъ нибудь x, черезъ

$$M, N, P, \ldots,$$

а при $x = x_i$, черезъ

$$M_i, N_i, P_i, \ldots,$$

имѣемъ

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l} =$$

$$= \sum M_i x_i^l + \sum l N_i x_i^{l-1} + \sum l(l-1) P_i x_i^{l-2} + \ldots\ldots$$

Выводя по этой формулѣ значеніе производной

$$\frac{d\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_l}$$

при

$$l = 0, 1, 2, \ldots\ldots m-1,$$

мы находимъ, что вышепоказанныя уравненія, опредѣляющія коеффиціенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

при которыхъ сумма

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, приводятся къ слѣдующему:

$$\sum M_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum 1.N_i x_i^0 = 0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2 P_i x_i^0 = 0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-2} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots = 0.$$

§ 3. Полагая для сокращенія

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_{m-1}) = \varphi(x)$$

и изображая черезъ

$$U, V, W, \ldots \ldots$$

цѣлыя функціи, получаемыя при дѣленіи произведеній

$$M\varphi'(x), \quad N\varphi'(x), \quad P\varphi'(x), \ldots$$

на $\varphi(x)$, мы замѣчаемъ, что дроби

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \ldots \ldots,$$

по разложеніи на простѣйшія, представляются такъ:

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U + \sum \frac{M_i}{x - x_i}; \quad \frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)} = V + \sum \frac{N_i}{x - x_i};$$

$$\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)} = W + \sum \frac{P_i}{x - x_i}; \ldots \ldots \ldots \ldots ;$$

гдѣ, по нашему знакоположенію (§ 2),

$$M_i, N_i, P_i, \ldots \ldots$$

означаютъ величину функцій

$$M, N, P, \ldots \ldots$$

при $x = x_i$; суммированіе же распространяется на всѣ величины: $x = x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_m$. Опредѣляя по этимъ формуламъ значеніе выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots,$$

мы находимъ, что оно равняется слѣдующему:

$$U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} + \ldots + \sum\left(\frac{M_i}{x-x_i} + \frac{N_i}{(x-x_i)^2} + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3} + \ldots\right);$$

гдѣ члены

$$U - \frac{dV}{dx} + \frac{d^2W}{dx^2} - \ldots$$

представляютъ цѣлую функцію, а сумма

$$\sum\left(\frac{M_i}{x-x_i} + \frac{N_i}{(x-x_i)^2} + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3} + \ldots\right),$$

по разложеніи дробей

$$\frac{M_i}{x-x_i}, \quad \frac{N_i}{(x-x_i)^2}, \quad + \frac{2P_i}{(x-x_i)^3}, \ldots$$

въ ряды

$$\frac{M_i x_i^0}{x} + \frac{M_i x_i}{x^2} + \frac{M_i x_i^2}{x^2} + \ldots,$$

$$\frac{N_i x_i^0}{x^2} + \frac{2 N_i x_i}{x^3} + \frac{3 N_i x_i^2}{x^4} + \ldots,$$

$$\frac{1.2.P_i x_i^0}{x^3} + \frac{2.3 P_i x_i}{x^4} + \frac{3.4 P_i x_i^2}{x^5} + \ldots$$

. . . .

и по соединеніи подобныхъ членовъ приводится къ такому ряду:

$$\frac{\Sigma M_i x_i^0}{x} + \frac{\Sigma M_i x_i + \Sigma N_i x_i^0}{x^2} + \frac{\Sigma M_i x_i^2 + \Sigma 2 N_i x_i + \Sigma 1.2 P_i x_i^0}{x^3} + \ldots$$

Откуда видно, что суммы

$$\sum M_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i + \sum N_i x_i^0,$$

$$\sum M_i x_i^2 + \sum 2 N_i x_i + \sum 1.2\, P_i x_i^0,$$

. . . .

$$\sum M_i x_i^{m-1} + \sum (m-1) N_i x_i^{m-1} + \sum (m-1)(m-2) P_i x_i^{m-3} + \ldots,$$

равняются коеффиціентамъ при

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \ldots \ldots \frac{1}{x^m}$$

въ разложеніи выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots.$$

по нисходящимъ степенямъ перемѣнной x; а такъ какъ эти суммы, по § 2, составляютъ первую часть уравненій, опредѣляющихъ значенія коеффиціентовъ полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

при которыхъ сумма

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, мы заключаемъ, что эти уравненія сводятся на обращеніе въ нуль коеффиціентовъ при

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \ldots \frac{1}{x^m}$$

въ разложеніи выраженія

$$\frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots.$$

по нисходящимъ степенямъ перемѣнной x, и слѣд., приводятся къ такому условію:

Выраженіе

$$(1) \ldots \frac{M\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d\,\frac{N\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2\,\frac{P\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} - \ldots\ldots,$$

съ точностію до степеней x^{-m} включительно, равняется функ-

ціи цѣлой. Здѣсь, какъ видѣли (§ 2), M, N, P, ... суть производныя функціи $F(x, y, y', y'', \ldots)$ по y, y', y'', ...

§ 4. До сихъ поръ мы предполагали, что коеффиціенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

были совершенно произвольны; теперь мы разсмотримъ тотъ случай, когда выборъ этихъ коеффиціентовъ ограниченъ нѣсколькими уравненіями такого вида:

$$\sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_1,$$

$$\sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

гдѣ

$$f_1(x, y, y', y'', \ldots), \quad f_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots.$$

какія нибудь цѣлыя функціи независимой перемѣнной x, полинома y и его производныхъ y', y'', ... Мы предположимъ сначала, что здѣсь всѣ суммированія распространяются на тѣ-же величины перемѣнной

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_{m-1},$$

какъ и сумма

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots),$$

которой ищется *maximum* или *minimum*.

По свойству *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ относительныхъ*, значенія количествъ

$$A_0, A_1, A_2, \ldots . A_{m-1},$$

которыя даютъ *maximum* или *minimum* суммы

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)$$

подъ условіями

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_1, \\ \sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

какъ извѣстно, опредѣляются тѣмъ, что они обращаютъ въ нуль производныя по A_0, A_1, A_2, ... A_m суммы

$$\sum f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_1 \sum f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) +$$

$$\lambda_2 \sum f_2(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ λ_1, λ_2, ... постоянные множители. Сумма-же эта приводится къ виду

$$\sum \left[\begin{array}{l} f_0(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \\ \lambda_2 f_2(x, y_i, y_i', y_i'', \ldots) + \ldots\ldots\ldots \end{array} \right],$$

что можно представить такъ:

$$\sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots),$$

полагая здѣсь

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = f_0(x, y, y', y'', \ldots) +$$

$$\lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots$$

А потому, на основаніи показаннаго въ §§ 2 и 3 относительно уравненій

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_0} = 0,$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d \sum F(x_i, y_i, y_i', y_i'', \ldots)}{dA_{m-1}} = 0,$$

мы заключаемъ, что въ настоящемъ случаѣ уравненія, опредѣляющія коеффиціенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

приведутся также къ условію, выведенному въ концѣ § 3, и что въ этомъ случаѣ за функцію

$$F(x, y, y', y'', \ldots .)$$

должны взять сумму

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots) + \lambda_1 f_1(x, y, y', y'', \ldots) +$$
$$\lambda_2 f_2(x, y, y', y'', \ldots) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots .$ неизвѣстные постоянные множители. Опредѣляя по этому условію коеффиціенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

мы найдемъ ихъ выраженія въ функціи множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; внося-же эти выраженія коеффиціентовъ полинома y въ условія (2), мы получимъ столько уравненій, сколько множителей $\lambda_1 \lambda_2 \ldots$; откуда и найдется ихъ величина.

§ 5. Переходимъ теперь къ тому случаю, когда требуется сдѣлать *maximum* или *minimum* сумму

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

распространенную на величины

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

а выборъ коеффиціентовъ полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

ограничивается условіями

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \ldots\ldots) = \alpha_1,$$

$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \ldots\ldots) = \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ суммы распространяются на величины x

$$x = b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots,$$

$$x = c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots,$$

различныя и между собою и съ величинами

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$$

Чтобы свести этотъ случай на случай, разсмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ, мы замѣняемъ всѣ вышепоказанныя суммы, распространенныя на различныя величины перемѣнной x, суммами, распространенными на однѣ и тѣ-же величины перемѣнной. Для этого, полагая

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots = \varphi_0(x),$$

$$(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots\ldots = \varphi_1(x),$$

$$(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots\ldots = \varphi_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и

$$\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots\ldots =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-b_1)\\(x-b_2)(x-b_3)\ldots\ldots(x-c_1)(x-c_2)\\(x-c_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} = \varphi(x),$$

опредѣляемъ цѣлыя функціи

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots\ldots,$$

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ \ldots\ldots,$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$(3)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \varphi'(x)\, S_0 = \varphi(x)\, T_0 + \varphi_0'(x)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \ldots\ldots, \\ \varphi'(x)\, S_1 = \varphi(x)\, T_1 + \varphi_1'(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_2(x) \ldots\ldots, \\ \varphi'(x)\, S_2 = \varphi(x)\, T_2 + \varphi_2'(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_1(x) \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Эти уравненія будутъ имѣть рѣшеніе; ибо, по положенію, корни уравненія $\varphi(x) = 0$, равные $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots,$ всѣ различны между собою, а потому функція $\varphi(x)$ не имѣетъ общаго множителя съ своею производною $\varphi'(x)$. На основаніи этихъ уравненій не трудно показать, что суммы

$$\sum S_0\, \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots), \sum S_1\, \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots),$$

$$\sum S_2\, \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

распространенныя на всѣ величины x

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

приведутся къ суммѣ

$$\sum \Phi_0\, (x, y, y', y'' \ldots),$$

распространенной только на $x = a_1, a_2, a_3, \ldots,$ — къ суммѣ

$$\sum \Phi_1\, (x, y, y', y'', \ldots),$$

распространенной только на $x = b_1, b_2, b_3, \ldots,$ — къ суммѣ

$$\sum \Phi_2\, (x, y, y', y'', \ldots),$$

распространенной только на $x = c_1, c_2, c_3 \ldots\ldots$ Чтобы показать это относительно суммы

$$\sum S_0 \Phi_0 (x, y, y', y'', \ldots\ldots),$$

мы замѣчаемъ, что по уравненію

$$\varphi'(x) S_0 = \varphi(x) T_0 + \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots\ldots$$

и составу функцій

$$\varphi(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\ldots,$$

функція S_0 будетъ обращаться въ нуль при $x = b_1, b_2, b_3, \ldots,$ $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots,$ корняхъ общихъ уравненіямъ

$$\varphi(x) = 0$$

и

$$\varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots\ldots = 0;$$

такъ какъ при этихъ величинахъ перемѣнной x производная $\varphi'(x)$ не будетъ нулемъ; ибо, по замѣченному выше, функціи $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не имѣютъ общаго множителя.

Съ другой стороны, при

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots,$$

корняхъ общихъ уравненіямъ

$$\varphi(x) = 0, \varphi_0(x) = 0,$$

мы находимъ, что производная

$$\varphi'(x) = \frac{d\, \varphi_0(x)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \ldots\ldots}{dx} =$$

$$= \varphi_0'(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots\ldots + \varphi_1'(x) \varphi_0(x) \varphi_2(x) \ldots\ldots +$$

$$\varphi_2'(x) \varphi_0(x) \varphi_1(x) \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

приводится къ $\varphi_0'(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,.\,.\,.\,.\,.$, и вслѣдствіе того, по уравненію

$$\varphi'(x)\,S_0 = \varphi(x)\,T_0 + \varphi_0'(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,.\,.\,.\,.\,.\,,$$

при такихъ величинахъ перемѣнной x, получится

$$S_0 = 1.$$

Откуда ясно, что сумма

$$\sum S_0\,\Phi_0(x, y, y_{,}, y'', .\,.\,.)\,,$$

распространенная на всѣ величины перемѣнной x

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

приводится къ суммѣ

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)\,,$$

распространенной только на

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Подобнымъ образомъ находимъ, что суммы

$$\sum S_1\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)\,,\ \sum S_2\,\Phi_2(x, y, y', y'', \ldots)\,,\ \ldots,$$

распространенныя на однѣ и тѣ-же величины перемѣнной x

$$x = a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

приводятся къ суммѣ

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)\,,$$

распространенной на

$$x = b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

— къ суммѣ

$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots),$$

распространенной на

$$x = c_1, c_2, c_3, \ldots,$$

и т. д.

Замѣняя на основаніи вышесказаннаго суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\sum \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

распространенныя на различныя величины перемѣнной x, суммами

$$\sum S_0 \Phi_0(x, y, y', y'' \ldots),$$
$$\sum S_1 \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\sum S_2 \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

распространенными на однѣ и тѣ-же величины перемѣнной x, опредѣляемыя уравненіемъ

$$\varphi(x) = 0,$$

мы заключаемъ, что въ настоящемъ случаѣ коеффиціенты полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

опредѣлятся по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, когда въ формулахъ этого параграфа за функціи

$$f_0(x, y, y', y'', \ldots), f_1(x, y, y', y'', \ldots), f_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots$$

примемъ произведенія

$$S_0\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots), S_1\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots), S_2\Phi_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots$$

и слѣд., они найдутся по условію, выведенному въ концѣ параграфа 3-го, когда положимъ тамъ

$$F(x,y,y',y'',\ldots) = S_0\Phi_0(x,y,y',y'',\ldots) + \lambda_1 S_1\Phi_1(x,y,y',y'',\ldots) + \lambda_2 S_2\Phi_2(x,y,y_{,},y'',\ldots) + \ldots\ldots$$

Здѣсь λ_1, λ_2, ... постоянные неизвѣстные множители.

Опредѣляя для этой величины функціи $F(x, y, y', y'', \ldots)$ выраженіе производныхъ

$$M = \frac{dF(x,y,y',y'',\ldots)}{dy},$$

$$N = \frac{dF(x,y,y',y'',\ldots)}{dy'},$$

$$P = \frac{dF(x,y,y',y'',\ldots)}{dy''},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

и изображая производныя функцій

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots), \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots), \Phi_2(x, y, y', y'', \ldots), \ldots$$

по

$$y,\ y',\ y'',\ \ldots\ldots$$

черезъ

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots\ldots,$$

$$N_0,\ N_1,\ N_2, \ldots\ldots,$$

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

находимъ

$$M = S_0 M_0 + \lambda_1 S_1 M_1 + \lambda_2 S_2 M_2 + \ldots\ldots,$$

$$N = S_0 N_0 + \lambda_1 S_1 N_1 + \lambda_2 S_2 N_2 + \ldots\ldots,$$

$$P = S_0 P_0 + \lambda_1 S_1 P_1 + \lambda_2 S_2 P_2 + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и выраженіе (1), которое для искомаго значенія полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$$

по § 3, должно равняться, съ точностію до степеней x^{-m} включительно, функціи цѣлой, въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$(4)\dots\left\{\begin{aligned} & \frac{S_0 M_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 M_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 M_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots \\ & - \frac{d\left\{\frac{S_0 N_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 N_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 N_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots\right\}}{dx} \\ & + \frac{d^2\left\{\frac{S_0 P_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_1 \frac{S_1 P_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \lambda_2 \frac{S_2 P_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} + \dots\right\}}{dx^2} \\ & - \dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Но по уравненіямъ (3), опредѣляющимъ функціи $S_0, S_1, S_2, \dots$, мы находимъ

$$\frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_0 + \frac{\varphi'_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\dots\dots}{\varphi(x)},$$

$$\frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_1 + \frac{\varphi'_1(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_2(x)\dots\dots}{\varphi(x)},$$

$$\frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_2 + \frac{\varphi'_2(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\dots\dots}{\varphi(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

по вставкѣ же во вторыя части этихъ равенствъ произведенія $\varphi_0(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\dots$ на мѣсто $\varphi(x)$ получаемъ

$$\frac{S_0 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_0 + \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)},$$

$$\frac{S_1 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_1 + \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

$$\frac{S_2 \varphi'(x)}{\varphi(x)} = T_2 + \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Откуда видно, что функціи

$$\frac{S_0\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad \frac{S_1\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},\quad \frac{S_2\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},\ldots$$

и

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)},\quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1'(x)},\quad \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2'(x)},\ldots$$

разнятся между собою только цѣлыми частями; а потому, замѣняя первыя послѣдними въ выраженіи (4), мы измѣнимъ только цѣлую часть этого выраженія; степень-же точности, съ которою это выраженіе представляетъ функцію цѣлую, останется безъ измѣненія; и слѣд. оно по прежнему будетъ служить для опредѣленія полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}.$$

Дѣлая такую перемѣну въ выраженіи (4), мы получаемъ слѣдующую формулу:

$$\frac{M_0\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{M_1\,\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{M_2\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots$$

$$- \frac{d\left\{\frac{N_0\,\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{N_1\,\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{N_2\,\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx}$$

$$+ \frac{d^2\left\{\frac{P_0\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{P_1\,\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{P_2\,\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx^2}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которая, по вышесказанному, съ точностію до степеней x^{-m} включительно, должна привестить къ функціи цѣлой, если полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

имѣетъ тѣ коеффиціенты, съ которыми сумма

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

подъ условіями

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

имѣетъ *наибольшую* или *наименьшую* величину. Мы это вывели, предполагая, что въ рядахъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,$$
$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots$$

нѣтъ одинакихъ членовъ; но по способу предѣловъ это легко распространяется и на тотъ случай, когда въ этихъ рядахъ есть общіе члены.

§ 6. Въ предыдущихъ параграфахъ мы показали условіе, опредѣляющее то значеніе полинома y данной степени, съ которымъ сумма

$$\sum \Phi_0 (x, y, y', y'', \ldots)$$

достигаетъ *наибольшей* или *наименьшей* величины. При этомъ мы предполагали, что коеффиціенты его или совершенно произвольны или должны удовлетворять уравненіямъ такого вида:

$$\sum \Phi_1 (x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$
$$\sum \Phi_2 (x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Въ послѣднемъ случаѣ, условіе, опредѣляющее искомый полиномъ y содержитъ неизвѣстныя постоянныя $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Величина этихъ постоянныхъ найдется по вышеприведеннымъ уравненіямъ, которымъ долженъ удовлетворять искомый полиномъ y и которыхъ столько-же, какъ и неизвѣстныхъ количествъ $\lambda_1\ \lambda_2, \ldots$

Опредѣленіе полинома y подъ условіемъ *наибольшей* или *наименьшей* величины суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots),$$

имѣетъ аналогію съ рѣшеніемъ подобныхъ вопросовъ въ Варіаціонномъ Исчисленіи, и въ частномъ случаѣ, когда эта сумма приводится къ интегралу, полиномъ y, опредѣляемый по вышесказанному, можетъ быть разсматриваемъ, какъ приближенное выраженіе той функціи, которую находятъ помощію варіацій. Но въ Варіаціонномъ Исчисленіи искомая функція, опредѣляясь дифференціальнымъ уравненіемъ, получается интегрированіемъ его по извѣстнымъ способамъ; здѣсь-же опредѣленіе искомаго полинома y требуетъ особенныхъ пріемовъ; такъ какъ онъ опредѣляется условіемъ, которое не приводится къ уравненіямъ какого либо изъ извѣстныхъ видовъ. Чтобы показать какъ могутъ быть опредѣляемы полиномы на основаніи такихъ условій, мы разсмотримъ теперь тотъ простѣйшій случай, когда функціи

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\Phi_2(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

содержатъ y въ степеняхъ не выше второй, а производныя его

$$y', y'', \ldots$$

въ степени не выше первой и съ коеффиціентами, зависящими только отъ перемѣнной x. Въ этомъ случаѣ производныя

$$M_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \quad M_1 = \frac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy}, \ldots$$

не заключаютъ $y', y'', \ldots$ и содержатъ y только въ первой степени; производныя-же

$$N_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'},\ N_1 = \frac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'}, \ldots,$$

$$P_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''},\ P_1 = \frac{d\,\Phi_1(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

не содержатъ совсѣмъ y, y', y'', ... ; а потому выраженіе

$$\frac{M_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{M_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{M_2\varphi'_2(x)}{\varphi^2(x)} + \ldots$$

$$- \frac{d\left\{\frac{N_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{N_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{N_2\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx}$$

$$+ \frac{d^2\left\{\frac{P_0\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \lambda_1 \frac{P_1\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + \lambda_2 \frac{P_2\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)} + \ldots\right\}}{dx^2}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которое по § 5, съ искомымъ полиномомъ

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

вѣрно до степеней x^{-m} включительно, должно равняться цѣлой функціи, приведется къ двучлену

$$uy - v,$$

гдѣ u, v функціи одной независимой перемѣнной x. Слѣд. въ этомъ случаѣ задача наша объ опредѣленіи полинома

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

подъ условіемъ *наибольшей* или *наименьшей величины* суммы

$$\sum \Phi_0(x, y, y', y'', \ldots)$$

приводится къ опредѣленію полинома y степени $m-1$, съ которымъ разность

$$uy - v,$$

вѣрно до степеней x^{-m} включительно, равняется функціи цѣлой. Полиномы-же, представляющіе такое свойство, какъ мы покажемъ, легко получаются при помощи ряда, даннаго въ Мемуарѣ нашемъ подъ заглавіемъ: *Разложеніе функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.* (*)

§ 7. Въ вышеупомянутомъ Мемуарѣ мы показали, что разлагая какую нибудь функцію u въ непрерывную дробь

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

опредѣляя ея подходящія дроби

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \dots$$

и изображая черезъ

$$R_1, \; R_2, \; R_3, \dots$$

разности

$$u Q_1 - P_1, \quad u Q_2 - P_2, \quad u Q_3 - P_3, \dots,$$

а черезъ

$$\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3, \dots$$

цѣлыя функціи, получаемыя по формулѣ

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \, \mathrm{E} q_n \, (Q_n v - \mathrm{E} \, Q_n v),$$

для разложенія функціи v по величинамъ

$$R_1, \; R_2, \; R_3, \dots$$

имѣемъ такой рядъ:

$$(5) \dots\dots\dots v = \mathrm{E} v + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \dots \; (**)$$

(*) IV томъ Записокъ Императорской Академіи Наукъ.

(**) Знакомъ E обозначаемъ цѣлую часть функцій.

При этомъ предполагается, что функціи u и v способны разлагаться по цѣлымъ нисходящимъ степенямъ перемѣнной x.

Приступая къ опредѣленію при помощи этого ряда полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

съ которымъ разность

$$uy - v,$$

вѣрно до членовъ степени x^{-m} включительно, приводится къ функціи цѣлой, положимъ, что

$$Q_\mu$$

есть послѣдній изъ знаменателей подходящихъ дробей

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$$

котораго степень ниже m, и что

$$F_\mu, F_{\mu-1}, \ldots F_2, F_1,$$

$$r_\mu, r_{\mu-1}, \ldots r_2, r_1$$

суть частныя и остатки, получаемые при дѣленіи полинома y на Q_μ, перваго остатка r_μ на $Q_{\mu-1}$, втораго остатка $r_{\mu-1}$ на $Q_{\mu-2}$, и т. д. Приравнивая дѣлимыя произведеніямъ частнаго на дѣлителя, сложеннымъ съ остаткомъ, мы получаемъ такой рядъ уравненій:

$$y = F_\mu Q_\mu + r_\mu, \; r_\mu = F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + r_{\mu-1}, \ldots,$$

$$r_3 = F_2 Q_2 + r_2, \; r_2 = F_1 Q_1 + r_1.$$

Исключая изъ этихъ уравненій остатки

$$r_\mu, r_{\mu-1}, \ldots r_3, r_2$$

и замѣчая, что послѣдній остатокъ r_1, получаемый при дѣленіи на $Q_1 = 1$, есть нуль, мы находимъ, что

$$y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1.$$

Искомый полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

будетъ во всякомъ случаѣ степени не выше $m - 1$, а потому функція F_μ, получаемая при дѣленіи y на Q_μ, будетъ степени не выще чѣмъ

$$\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$$

и слѣд. степени ниже

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu};$$

такъ какъ $Q_{\mu+1}$, по положенію, будетъ степени выше $m - 1$. Функціи-же

$$F_{\mu-1}, F_{\mu-2}, \ldots, F_2, F_1$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$\frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}}, \quad \frac{Q_{\mu-1}}{Q_{\mu-2}}, \ldots, \frac{Q_3}{Q_2}, \quad \frac{Q_2}{Q_1};$$

такъ какъ онѣ получаются при дѣленіи остатковъ

$$\rho_\mu, \rho_{\mu-1}, \ldots, \rho_2, \rho_1$$

на

$$Q_{\mu-1}, Q_{\mu-2}, \ldots, Q_2, Q_1,$$

а эти остатки, получаясь отъ дѣленія на

$$Q_\mu, Q_{\mu-1}, \ldots, Q_2, Q_1,$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$Q_\mu, Q_{\mu-1}, \ldots, Q_2, Q_1.$$

Для опредѣленія множителей

$$F_\mu, F_{\mu-1}, \ldots, F_2, F_1$$

въ разложеніи искомаго полинома y по формулѣ

(6) . . . . . . $y = F_\mu Q_\mu + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + \ldots + F_2 Q_2 + F_1 Q_1,$

мы замѣчаемъ, что разность

$$uy - v,$$

по внесеніи въ нее этого выраженія y и величины v по формулѣ (5), представляется такъ:

$$uy - v = F_\mu Q_\mu u + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} u + \ldots + F_2 Q_2 u + F_1 Q_1 u$$
$$- \mathrm{E}\, v - \omega_1 R_1 - \omega_2 R_2 - \omega_3 R_3 \ldots\ldots\ldots,$$

что по вставкѣ величинъ

$$Q_\mu u,\ \ Q_{\mu-1} u, \ldots,\ Q_2 u,\ \ Q_1 u,$$

получаемыхъ изъ равенствъ

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu,\ \ R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1}, \ldots\ldots\ldots,$$

приводится къ такому виду:

$$uy - v = -\mathrm{E}\, v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$
$$+ (F_1 - \omega_1) R_1 + (F_2 - \omega_2) R_2 + \ldots\ldots\ldots +$$
$$(F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1}) R_{\mu-1} + (F_\mu - \omega_\mu) R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \ldots$$

Разсматривая это выраженіе разности

$$uy - v,$$

мы замѣчаемъ, что здѣсь члены

$$-\mathrm{E}\, v + F_1 P_1 + F_2 P_2 + \ldots + F_{\mu-1} P_{\mu-1} + F_\mu P_\mu$$

составляютъ функцію цѣлую; остальные-же, какъ не трудно убѣдиться, всѣ степеней отрицательныхъ и степени ихъ идутъ понижаясь. Въ самомъ дѣлѣ, по нашему знакоположенію

$R_1 = Q_1 u - P_1,\ R_2 = Q_2 u - P_2,\ \ldots,\ R_{\mu-1} = Q_{\mu-1} u - P_{\mu-1},$

$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu,\ R_{\mu+1} = Q_{\mu+1} u - P_{\mu+1},\ \ldots\ldots\ldots\ldots;$

а эти разности, по свойству подходящихъ дробей, однихъ степеней съ дробями

$$\frac{1}{Q_2},\ \frac{1}{Q_3},\ \frac{1}{Q_4},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{Q_\mu},\ \frac{1}{Q_{\mu-1}},\ \frac{1}{Q_{\mu-2}},\ \ldots;$$

по сказанному-же въ предыдущемъ параграфѣ относительно функцій

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_{\mu-1},\ F_\mu$$

и въ вышеупомянутомъ Мемуарѣ относительно функцій

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_{\mu-1},\ \omega_\mu,\ \omega_{\mu+1},\ \ldots$$

видно, что въ членахъ

$$(F_1 - \omega_1)R_1 + (F_2 - \omega_2)R_2 + \ldots + (F_{\mu-1} - \omega_{\mu-1})R_{\mu-1} +$$
$$(F_\mu - \omega_\mu)R_\mu - \omega_{\mu+1} R_{\mu+1} - \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

множителями при

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ldots\ldots$$

стоятъ цѣлыя функціи степеней ниже чѣмъ

$$\frac{Q_2}{Q_1},\ \frac{Q_3}{Q_2},\ \ldots\ldots,\ \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}},\ \frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu},\ \frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}},\ \ldots;$$

а потому первый членъ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_2}$, и не ниже $\frac{1}{Q_2}$, второй членъ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_3}{Q_2} \cdot \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{Q_2}$ и не ниже чѣмъ $\frac{1}{Q_3}$, ..., членъ $\omega_{\mu+1} R_{\mu+1}$ степени ниже чѣмъ $\frac{Q_{\mu+2}}{Q_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{Q_{\mu+3}} = \frac{1}{Q_{\mu+1}}$ и не ниже чѣмъ $\frac{1}{Q_{\mu+2}}$ и т. д.

Откуда видно, что въ вышенайденномъ выраженіи разности

$$uy - v$$

дробная часть представляется рядомъ

$$(F_1-\omega_1)R_1+(F_2-\omega_2)R_2+\ldots\ldots+(F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1})R_{\mu-1}+$$
$$(F_\mu-\omega_\mu)R_\mu-\omega_{\mu+1}R_{\mu+1}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

гдѣ степени членовъ идутъ понижаясь, а потому степень точности, съ которою эта разность приводится къ функціи цѣлой, опредѣлится степенью перваго изъ членовъ его, не обращающагося въ нуль.

На основаніи этого не трудно найти значеніе функцій

$$F_1,\ F_2,\ \ldots\ldots,\ F_{\mu-1},\ F_\mu,$$

входящихъ въ выраженіе (6) искомаго полинома или убѣдиться въ невозможности его.

Члены

$$(F_1-\omega_1)R_1,\quad (F_2-\omega_2)R_2,\ \ldots\ldots,\ (F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1})R_{\mu-1},$$

какъ видѣли, будутъ степеней не ниже чѣмъ

$$\frac{1}{Q_2},\ \frac{1}{Q_3},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{Q_\mu},$$

и слѣд. не ниже чѣмъ

$$x^{-m+1};$$

ибо по нашему знакоположенію въ ряду знаменателей

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots\ldots,\ Q_\mu$$

ни одинъ не будетъ степени выше $m-1$; а потому разность

$$uy-v$$

можетъ привестись къ функціи цѣлой съ точностію до x^{-m} только въ томъ случаѣ, когда всѣ эти члены сокращаются, что предполагаетъ такія уравненія:

$$F_1-\omega_1=0,\ F_2-\omega_2=0,\ \ldots\ldots,\ F_{\mu-1}-\omega_{\mu-1}=0$$

изъ которыхъ мы находимъ

(7). . . . . $F_1 = \omega_1,\ F_2 = \omega_2,\ \ldots\ldots,\ F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}$.

При этихъ величинахъ функцій

$$F_1,\ F_2,\ \ldots\ldots\ F_{\mu-1}$$

вышенайденное выраженіе дробной части разности

$$uy - v$$

приводится къ ряду

$$(F_\mu - \omega_\mu)\, R_\mu - \omega_{\mu+1}\, R_{\mu+1} - \omega_{\mu+2}\, R_{\mu+2} - \ldots\ldots;$$

гдѣ, какъ видѣли, члены

$$\omega_{\mu+1} R_{\mu+1},\ \omega_{\mu+2} R_{\mu+2},\ \ldots\ldots$$

степеней ниже чѣмъ

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}},\ \frac{1}{Q_{\mu+2}},\ \ldots\ldots\ldots,$$

и слѣд. ниже чѣмъ

$$x^{-m};$$

ибо, по нашему знакоположенію, знаменатели

$$Q_{\mu+1},\ Q_{\mu+2},\ \ldots\ldots$$

степеней не ниже m. А потому, чтобы привести найденное выраженіе разности

$$uy - v$$

къ функціи цѣлой съ точностію до степеней x^{-m} включительно, необходимо и достаточно, давши функціямъ

$$F_1,\ F_2,\ \ldots\ldots,\ F_{\mu-1}$$

вышенайденныя значенія (7), сдѣлать степень члена

$$(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$$

ниже $-m$.

Но, съ другой стороны, чтобы искомый полиномъ y, опредѣляемый формулою

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots\ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

оставался, согласно съ требованіемъ задачи, степени не выше m, необходимо и достаточно, при $F_1, F_2, \ldots\ldots F_\mu$ вышенайденныхъ (7), сдѣлать членъ $F_\mu Q_\mu$ степени не выше $m-1$; ибо остальные члены, какъ не трудно убѣдиться, будутъ степеней ниже $m-1$. Въ самомъ дѣлѣ, по замѣченному выше множители

$$F_1 = \omega_1, F_2 = \omega_2, \ldots, F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1}$$

будутъ степеней ниже

$$\frac{Q_2}{Q_1}, \quad \frac{Q_3}{Q_2}, \ldots\ldots, \frac{Q_\mu}{Q_{\mu-1}},$$

а потому произведенія

$$F_1 Q_1, F_2 Q_2, \ldots\ldots, F_\mu Q_\mu$$

будутъ степеней ниже чѣмъ

$$Q_2, Q_3, \ldots\ldots, Q_\mu,$$

и слѣд. ниже чѣмъ

$$x^{m-1};$$

такъ какъ по нашему знакоположенію всѣ эти знаменатели подходящихъ дробей u степеней ниже $m-1$.

На основаніи этого мы заключаемъ, что искомый полиномъ y найдется по формулѣ

$$y = F_1 Q_1 + F_2 Q_2 + \ldots + F_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

гдѣ

$$F_1 = \omega_1, \; F_2 = \omega_2, \ldots, F_{\mu-1} = \omega_{\mu-1},$$

а множитель F_μ есть цѣлая функція, опредѣляемая такими условіями:

Степень произведенія $F_\mu Q_\mu$ не выше $m-1$, а степень произведенія $(F_\mu - \omega_\mu) R_\mu$ не выше $-m-1$.

Такъ какъ по нашему знакоположенію

$$R_\mu = Q_\mu u - P_\mu,$$

а по свойству подходящихъ дробей разность

$$Q_\mu u - P_\mu$$

будетъ одной степени съ дробью

$$\frac{1}{Q_{\mu+1}};$$

то при опредѣленіи по вышесказанному множителя F_μ можно взять эту дробь вмѣсто R_μ; вслѣдствіе чего условія, опредѣляющія множитель F_μ, можно представить такъ:

Степень произведенія $F_\mu Q_\mu$ не выше $m-1$, а степень частнаго $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ не выше $-m-1$.

Что касается до функцій

$$\omega_1, \omega_2, \omega_2 \ldots\ldots,$$

то онѣ, какъ замѣчено было въ предыдущемъ параграфѣ, вообще выражаются такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E} q_n (Q_n v - \mathrm{E} Q_n v)$$

Опредѣлья по этой формулѣ значеніе функцій

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\mu-1}$$

и по (7) внося ихъ въ выраженіе искомаго полинома y вмѣсто

$$F_1, F_2, \ldots, F_{\mu-1},$$

мы для опредѣленія y находимъ такую формулу:

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots\ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

гдѣ множитель F_μ долженъ быть выбранъ согласно съ вышепоказанными условіями. Опредѣленіемъ F_μ подъ этими условіями мы и займемся въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 8. По нашему знакоположенію

$$Q_\mu$$

есть послѣдній знаменатель въ ряду

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots\ldots,\ Q_\mu,\ Q_{\mu+1},\ \ldots\ldots$$

степени ниже m, а потому знаменатель

$$Q_{\mu+1}$$

будетъ или степени m или степени выше m. Въ первомъ случаѣ, какъ не трудно показать, вышенайденнымъ условіямъ, ограничивающимъ выборъ множителя F_μ, будетъ удовлетворять только одна такая величина F_μ:

$$F_\mu = \omega_\mu;$$

во второмъ-же случаѣ или ни одна величина F_μ не будетъ удовлетворять этимъ условіямъ, или имъ будетъ удовлетворять функція съ нѣсколькими произвольными коеффиціентами.

Въ самомъ дѣлѣ, по условіямъ, опредѣляющимъ функцію F_μ, произведеніе $F_\mu\, Q_\mu$ должно быть степени не выше $m - 1$, а частное $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ степени не выше $-m-1$. Но если знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени m, то при дѣлимомъ $F_\mu - \omega_\mu$ цѣломъ, отличномъ отъ нуля, частное

$$\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$$

будетъ всегда степени выше $-m-1$. Слѣд. въ этомъ случаѣ необходимо принять

$$F_\mu - \omega_\mu = 0;$$

откуда выходитъ

$$F_\mu = \omega_\mu.$$

Такъ какъ функція ω_μ, по замѣченному выше, степени ниже чѣмъ

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu},$$

то при этой величинѣ F_μ произведеніе

$$F_\mu \, Q_\mu$$

будетъ степени ниже чѣмъ

$$\frac{Q_{\mu+1}}{Q_\mu} \cdot Q_\mu = Q_{\mu+1},$$

и слѣд. ниже чѣмъ x^m; ибо въ разсматриваемомъ случаѣ знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени m.

Изъ этого видно, что при $Q_{\mu+1}$ степени m можно взять

$$F_\mu = \omega_\mu,$$

и что никакая другая величина множителя F_μ не можетъ удовлетворять условіямъ, выведеннымъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Слѣд. въ этомъ случаѣ для искомаго полинома y будетъ возможна одна только величина и она получится изъ вышенайденной формулы

$$y = \omega_1 Q_1 + \omega_2 Q_2 + \ldots + \omega_{\mu-1} Q_{\mu-1} + F_\mu Q_\mu,$$

когда примемъ въ ней

$$F_\mu = \omega_\mu.$$

Переходимъ къ тому случаю, когда знаменатель $Q_{\mu+1}$ степени выше m. По условіямъ, опредѣляющимъ множитель F_μ, произведеніе $F_\mu \, Q_\mu$ должно быть степени не выше $m-1$, а частное $\frac{F_\mu - \omega_\mu}{Q_{\mu+1}}$ степени не выше $-m-1$, или, что одно и то-же, множитель F_μ долженъ быть степени не выше чѣмъ $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, а разность

$F_\mu - \omega_\mu$ степени не выше $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$, а это приводится къ такимъ уравненіямъ:

$$(8) \ldots\ldots\ldots F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots\ldots,$$

$$(9) \ldots\ldots\ldots F_\mu - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots\ldots,$$

гдѣ ν означаетъ степень функціи $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, ν_1 степень функціи $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$, а $C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots\ldots$ неопредѣленные коеффиціенты.

Эти уравненія, по исключеніи F_μ, даютъ

$$\omega_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - C' x^{\nu_1} - C'' x^{\nu_1 - 1} \ldots\ldots,$$

что не можетъ быть удовлетворено никакими величинами $C_1, C_2, \ldots, C', C'', \ldots$, если степень функціи ω_μ превосходитъ и показателя ν и показателя ν_1. Откуда видно, что при ω_μ степени выше ν и ν_1 нельзя удовлетворить условіямъ, опредѣляющимъ множитель F_μ въ выраженіи искомаго полинома, и слѣд. въ этомъ случаѣ рѣшеніе нашей задачи невозможно. Въ противномъ-же случаѣ, когда степень Q_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ: ν, ν_1, значеніе множителя F_μ легко найдется, и, какъ не трудно замѣтить, оно будетъ опредѣляться или однимъ уравненіемъ (8) или однимъ уравненіемъ (9), смотря по тому будетъ-ли

$$\nu < \nu_1$$

или

$$\nu \text{ не } < \nu_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, взявши значеніе F_μ по уравненію (8) и внеся его въ уравненіе (9), мы находимъ, что послѣднее приводится къ слѣдующему:

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1-1} + \ldots\ldots$$

Если показатель ν меньше ν_1, первая часть этого уравненія будетъ степени не выше чѣмъ вторая; ибо при $\nu < \nu_1$ степень

функціи ω_μ не можетъ быть больше ν_1; такъ какъ иначе, въ противность положенія, она превосходила бы оба числа ν и ν_1. А потому въ этомъ случаѣ всегда удовлетворится уравненіе

$$C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots - \omega_\mu = C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots .$$

приличнымъ выборомъ коеффиціентовъ

$$C', C'', \ldots \ldots$$

во второй части его, каковы бы ни были коеффиціенты $C_1, C_2, \ldots$ въ первой части.

Точно также при ν не $< \nu_1$, взявши по (9)

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots ,$$

и оставляя здѣсь всѣ коеффиціенты произвольными, мы получаемъ значеніе F_μ, удовлетворяющее уравненію (8) при величинахъ C_1, C_2, ... приличнымъ образомъ выбранныхъ.

Изъ этого видно, что всякій разъ, когда степень функціи ω_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ ν, ν_1 (степеней функцій $\frac{x^{m-1}}{Q_\mu}$, $\frac{Q_{\mu+1}}{x^{m+1}}$), значеніе множителя F_μ по условіямъ предыдущаго параграфа можетъ быть найдено, и что величина F_μ опредѣлится или формулою

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots \ldots$$

или формулою

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots \ldots ,$$

смотря по тому будетъ-ли $\nu < \nu_1$ или $\nu \overline{\overline{>}} \nu_1$. Коеффиціенты-же

$$C_1, C_2, \ldots \ldots ,$$

$$C', C'', \ldots \ldots .$$

остаются произвольными.

§ 9. Для примѣра мы разсмотримъ теперь опредѣленіе полинома

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

подъ условіемъ наибольшей или наименьшей величины суммы

$$\sum \frac{1}{2}\left(y_i - f(x_i)\right)^2 \theta(x_i),$$

распространенной на

$$x = x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$$

Сначала мы предположимъ, что выборъ коеффиціентовъ

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{m-1}$$

искомаго полинома y ничѣмъ не ограниченъ, а потомъ мы перейдемъ къ тому случаю, когда дана величина одного изъ коеффиціентовъ

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{m-1}.$$

Въ первомъ предположеніи, при $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ дѣйствительныхъ и функціи $\theta(x)$ не мѣняющей знака, мы получимъ извѣстную уже формулу, которая рѣшаетъ вопросъ о параболическомъ интерполированіи ко способу *наименьшихъ квадратовъ* въ обыкновенныхъ случаяхъ; во второмъ предположеніи, при тѣхъже значеніяхъ количествъ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ и функціи $\theta(x)$, мы найдемъ формулу для параболическаго интерполированія по способу *наименьшихъ квадратовъ* въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда одинъ изъ коеффиціентовъ выраженія y долженъ имѣть требуемую величину.

Полагая въ формулахъ § 2

$$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots) = \frac{1}{2}\left(y - f(x) \right)^2 \theta(x),$$

мы находимъ

$$M = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy} = \Big(y - f(x)\Big)\,\theta(x),$$

$$N = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy'} = 0,$$

$$P = \frac{dF(x, y, y', y'', \ldots)}{dy''} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

При такихъ значеніяхъ функцій

$$M,\ N,\ P, \ldots\ldots$$

и въ предположеніи, что нѣтъ никакихъ условій, ограничивающихъ выборъ коеффиціентовъ полинома y, для опредѣленія его, по § 3, имѣемъ такое условіе:

Выраженіе

$$\Big(y - f(x)\Big)\,\theta(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

гдѣ $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots$, *должно, съ точностію до степеней* x^{-m} *включительно, привестись къ функціи цѣлой.*

Изображая черезъ

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,\ \psi_{\mu-1}(x),\ \psi_\mu(x),\ \psi_{\mu+1}(x), \ldots\ldots$$

знаменателей подходящихъ дробей, получаемыхъ разложеніемъ выраженія

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

въ непрерывную дробь

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{\ddots}{\ + \cfrac{1}{q_{\mu-1} + \cfrac{1}{q_\mu + \cfrac{1}{q_{\mu+1} + \ldots}}}}},$$

и полагая, что въ ряду

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,\ \psi_{\mu-1}(x),\ \psi_\mu(x),\ \psi_{\mu+1}(x), \ldots$$

послѣдняя функція степени ниже m есть

$$\psi_\mu(x),$$

мы, по параграфу 7, находимъ, что полиномъ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

удовлетворяющій такому условію, опредѣляется формулою

$$y = \omega_1 \psi_1(x) + \omega_2 \psi_2(x) + \ldots + \omega_{\mu-1} \psi_{\mu-1}(x) + F_\mu \psi_\mu(x),$$

гдѣ множители

$$\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_{\mu-1}$$

найдутся по формулѣ

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \operatorname{E} q_n \left(\frac{\psi_n(x) f(x)\, \theta(x)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \operatorname{E} \frac{\psi_n(x) f(x)\, \theta(x)\, \varphi'(x)}{\varphi(x)} \right);$$

а множитель F_μ, по параграфу 8, будетъ имѣть одну опредѣленную величину

$$F_\mu = \omega_\mu,$$

если функція $\psi_{\mu+1}(x)$ степени m; въ противномъ-же случаѣ, если только задача наша имѣетъ рѣшеніе, т. е. если сумма

$$\sum \frac{1}{2} \left(y_i - f(x_i) \right)^2 \theta(x_i)$$

имѣетъ *maximum* или *minimum*, множитель F_μ содержитъ нѣсколько произвольныхъ коеффиціентовъ и найдется по одной изъ формулъ:

$$F_\mu = C_1 x^\nu + C_2 x^{\nu-1} + \ldots\ldots,$$

$$F_\mu = \omega_\mu + C' x^{\nu_1} + C'' x^{\nu_1 - 1} + \ldots\ldots,$$

гдѣ ν, ν_1 означаютъ степени функцій

$$\frac{x^{m-1}}{\psi_\mu(x)}, \qquad \frac{\psi_{\mu+1}(x)}{x^{m+1}},$$

и первая изъ этихъ формулъ будетъ имѣть мѣсто при $\nu < \nu_1$, вторая при $\nu \overline{\overline{>}} \nu_1$. Что касается до признака, по которому мы узнаемъ, имѣетъ-ли наша задача рѣшеніе или нѣтъ, то, какъ видѣли (§ 8), множитель F_μ удовлетворяющій условіямъ нашей задачи, возможенъ только въ томъ случаѣ, когда степень функціи ω_μ не превосходитъ по крайней мѣрѣ одного изъ чиселъ ν, ν_1.

Въ томъ случаѣ, когда величины

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$$

имѣютъ дѣйствительныя значенія и функція

$$\theta(x)$$

не мѣняетъ своего знака, непрерывная дробь, происходящая отъ разложенія выраженія

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

какъ извѣстно, будетъ такого вида:

$$q_0 + \cfrac{1}{A_1 x + B_1 + \cfrac{1}{A_2 x + B_2 + \ldots}},$$

гдѣ $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\ldots$ величины постоянныя (*). Въ этомъ случаѣ функціи

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\ldots$$

имѣютъ такія значенія:

$$q_1 = A_1 x + B_1,\ q_2 = A_2 x + B_2, \ldots,\ q_n = A_n x + B_n, \ldots$$

(*) См. Мемуаръ подъ заглавіемъ: *О непрерывныхъ дробяхъ*. (Ученыя записки Академіи, Томъ X). Въ этомъ-же мы убѣждаемся на основаніи того, что при $x_1, x_2, x_3, \ldots$ дѣйствительныхъ и $\theta(x)$ не мѣняющемъ знака, наша задача имѣетъ всегда одно рѣшеніе, каково бы ни было m; такъ какъ это по § 8 предполагаетъ, что въ ряду $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots\ldots$ найдется всегда знаменатель степени m, и слѣд., что здѣсь найдутся знаменатели всѣхъ степеней, что возможно только при вышепоказанномъ видѣ непрерывной дроби.

а

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x)_1\ \ldots\ ,\ \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x),\ \ldots\ ,$$

знаменатели подходящихъ дробей выраженія

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

будутъ степеней

$$0,\ 1,\ \ldots\ ,\ m-2,\ m-1,\ m,\ \ldots\ .$$

Такъ какъ здѣсь послѣдній знаменатель степени ниже m есть $\psi_n(x)$, а слѣдующій за нимъ, $\psi_{m+1}(x)$, степени m, то, по вышесказанному, искомый полиномъ въ разсматриваемомъ случаѣ найдется по формулѣ

$$y = \omega_1\psi_1(x) + \omega_2\psi_2(x) + \ldots + \omega_{m-1}\psi_{m-1}(x) + \omega_m\psi_m(x).$$

Внося-же въ вышепоказанное (§ 7) выраженіе множителей

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ \omega_{m-1},\ \omega_m$$

величину $q_n = A_n x + B_n$, мы найдемъ, что они будутъ опредѣляться такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\,\mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)f(x)\theta(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)$$

Изображая черезъ U цѣлую функцію, получаемую при дѣленіи произведенія

$$\psi_n(x)\ f(x)\ \theta(x)\ \varphi'(x)$$

на $\varphi(x)$, мы, по нашему знакоположенію, имѣемъ

$$\mathrm{E}\,\frac{\psi_n(x)\,f(x)\,\theta(x)\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = U,$$

и

$$\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} =$$

$$U + \frac{\psi_n(x_1) f(x_1) \theta(x_1)}{x-x_1} + \frac{\psi_n(x_2) f(x_2) \theta(x_2)}{x-x_2} + \ldots .$$

$$= U + \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i},$$

что, для величины разности

$$\frac{\psi_n(x) f(x) \theta(x) \varphi'(x)}{\varphi(x)} - \mathrm{E}\, \frac{\psi_n(x_i) f(x_i) \theta(x_i) \varphi'(x_i)}{\varphi(x)},$$

даетъ

$$\sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i}.$$

Вслѣдствіе этого вышенайденное выраженіе множителя ω_n приводится къ слѣдующему:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\, \mathrm{E} \left(A_n x + B_n\right) \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{x-x_i},$$

что иначе можно написать такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1}\, \mathrm{E} \left(A_n + \frac{B_n}{x}\right) \sum \frac{f(x_i)\theta(x_i)\psi_n(x_i)}{1-\frac{x_i}{x}}$$

Выраженіе, стоящее здѣсь надъ знакомъ E, есть нулевой степени, а потому, дѣлая $x=\infty$, мы получимъ цѣлую часть этого выраженія. Такимъ образомъ мы находимъ по предыдущей формулѣ, что

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \sum A_n f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_n(x_i)$$

$$= (-1)^{n-1} A_n \sum f(x_i)\, \theta(x_i)\, \psi_n(x_i).$$

Опредѣляя по этой формулѣ значеніе множителей

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-1}, \omega_m$$

въ вышенайденномъ выраженіи искомаго полинома y, мы получаемъ такую формулу:

$$y = A_1 \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_i).\ \psi_1(x) - A_2 \sum f(x_i)\theta(x_i)\psi_2(x_i).\psi_2(x) +$$

$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-2} A_{m-1} \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_{m-1}(x).\ \psi_{m-1}(x)$$

$$+ (-1)^{m-1} A_m \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_m(x_i).\ \psi_m(x).$$

Такъ опредѣляется полиномъ y степени $m - 1$, съ которымъ сумма

$$\sum \tfrac{1}{2}\Big(y_i - f(x_i)\Big)^2 \theta(x_i),$$

распространенная на дѣйствительныя величины x, при множителѣ $\theta(x)$ не мѣняющемъ своего знака, имѣетъ *maximum* или *minimum*. Эта формула и служитъ для параболическаго интерполированія по способу *наименьшихъ квадратовъ*, когда относительно коеффиціентовъ искомаго полинома нѣтъ никакихъ особенныхъ условій.

§ 10. Переходимъ теперь къ тому случаю, когда въ искомомъ полиномѣ

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_{m-1} x^{m-1}$$

коеффиціентъ при x^l, гдѣ l одно изъ чиселъ 0, 1, 2, ... , $m-1$, предполагается даннымъ.

Условіе, что въ полиномѣ y коеффиціентъ при x^l долженъ равняться какой нибудь данной величинѣ, можетъ быть представлено равенствомъ

$$\sum \Phi_1(x, y, y', y'', \ldots) = \alpha_1,$$

если принять, что здѣсь сумма распространяется только на одну величину перемѣнной $x = 0$, и что функція

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots)$$

приводится къ одному члену $y^l = \frac{d^l y}{dx^l}$. Въ этомъ случаѣ, по знакоположенію 5-го параграфа, будемъ имѣть

$$\varphi_1(x) = x; \quad \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{1}{x};$$

и всѣ производныя функціи

$$\Phi_1(x, y, y', y'', \dots) = y^l$$

по $y, y', y'', \dots\dots$ обратятся въ нуль, кромѣ производной по y^l, которая будетъ равна 1.

Предполагая-же, что сумма, которой желаютъ имѣть *maximum* или *minimum*, есть, по прежнему,

$$\sum \frac{1}{2}\Big(y - f(x)\Big)^2 \theta(x)$$

и что она распространяется на величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots\dots,$$

мы, по знакоположенію параграфа 5, имѣемъ

$$\Phi_0(x, y, y', y'', \dots) = \frac{1}{2}\Big(y - f(x)\Big)^2 \theta(x),$$

$$M_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy} = \Big(y - f(x)\Big)\,\theta(x),$$

$$N_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy'} = 0,$$

$$P_0 = \frac{d\,\Phi_0(x, y, y', y'', \dots)}{dy''} = 0,$$

. . . .

и

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots = \varphi_0(x).$$

При такихъ значеніяхъ функцій

$$M_0,\ N_0,\ P_0,\ .\ .\ .\ ,\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$$

и по замѣченному выше относительно производныхъ функцій

$$\Phi_1(x,\ y,\ y',\ y'',\ .\ .\ .\ .\ )=y^l$$

по $y,\ y',\ y'',\ .\ .\ .\ ,\ y^l,\ .\ .\ .$, искомый полиномъ, на основаніи § 5, опредѣлится такимъ условіемъ:

Выраженіе

$$\frac{\big((y-f(x)\big)\ \theta(x)\ \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}+(-1)^l\frac{d^l\ \frac{\lambda_1}{x}}{dx^l}$$

вѣрно до степеней x^{-m} *включительно должно привестись къ функціи цѣлой.*

Такъ какъ это выраженіе, по выполненіи дифференцированія и по раскрытіи скобки приводится къ разности

$$\frac{\theta(x)\ \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}\ y-\left(\frac{f(x)\ \theta(x)\ \varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}-\frac{1.\ 2.\ .\ l.\ \lambda_1}{x^{l+1}}\right);$$

то по § 7, для опредѣленія полинома y, должно разложить въ непрерывную дробь выраженіе

$$\frac{\theta(x)\ \varphi'_0(x)}{\varphi'_0(x)}.$$

Ограничиваясь тѣмъ случаемъ, когда всѣ величины

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .\ .\ .$$

дѣйствительныя и функція

$$\theta(x)$$

не мѣняетъ своего знака, мы, по замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, будемъ имѣть

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} = q_0 + \frac{1}{A_1x + B_1 + \frac{1}{A_2x + B_2 + \dots}}$$

гдѣ $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ постоянныя величины, и изъ этого разложенія выраженія

$$\frac{\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$$

найдется рядъ подходящихъ дробей, которыхъ знаменатели

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \dots \psi_{m-1}(x),\ \psi_m(x),\ \psi_{m+1}(x), \dots$$

будутъ степеней

$$0,\ 1, \dots m-2,\ m-1,\ m, \dots$$

Такъ какъ здѣсь послѣдній знаменатель, степени ниже m, есть $\psi_m(x)$, и слѣдующій за нимъ, $\psi_{m+1}(x)$, степени $m+1$, то искомый полиномъ

$$y = A_0 + A_1x + \dots + A_{m-1}x^{m-1}$$

представится по § 8 формулою

$$y = \omega_1\psi_1(x) + \omega_2\psi_2(x) + \dots + \omega_{m-1}\psi_{m-1}(x) + \omega_m\psi_m(x).$$

Замѣчая-же, что въ настоящемъ случаѣ

$$q_1 = A_1x + B_1,\ q_2 = A_2x + B_2, \dots,$$

$$Q_1 = \psi_1(x),\ Q_2 = \psi_2(x), \dots,$$

и

$$v = \frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2 \dots l.\lambda_1}{x^{l+1}};$$

мы для опредѣленія множителей

$$\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_{m-1}, \omega_m$$

по § 7 находимъ такую формулу:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E}(A_n x + B_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots.l.\lambda_1}{x^{l+1}}\right)\psi_n(x) \\ -\mathrm{E}\left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)} - \frac{1.2\ldots.l.\lambda_1}{x^{l+1}}\right)\psi_n(x) \end{array} \right\}$$

что иначе можетъ быть написано такъ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} \mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{f(x)\theta(x)\varphi'_0(x)\psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathrm{E}\frac{f(x)\theta(x)\varphi'_0(x)\psi_n(x)}{\varphi_0(x)}\right)$$

$$-(-1)^{n-1}\, 1.2\ldots l.\lambda_1\, \mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right).$$

Но, по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, выраженіе

$$\mathrm{E}(A_n x + B_n)\left(\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)\,\psi_n(x)}{\varphi_0(x)} - \mathrm{E}\frac{f(x)\,\theta(x)\,\varphi'_0(x)\psi_n(x)}{\varphi_0(x)}\right)$$

приведется къ

$$A_n \sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i).$$

Разлагая-же функцію $\psi_n(x)$ по Маклореновой строкѣ, мы находимъ, что

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{\psi_n(0)}{x^{l+1}} + \frac{1}{1}\,\frac{\psi'_n(0)}{x^l} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1.\,2\ldots l}\,\frac{\psi_n{}^l(0)}{x} +$$

$$\frac{1}{1.2\ldots l\,(l+1)}\,\psi_n{}^{l+1}(0) + \frac{x}{1.\,2\ldots(l+1)\,(l+2)}\,\psi_n{}^{l+2}(0) + \ldots,$$

а потому

$$\mathrm{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} = \frac{1}{1.2\ldots l(l+1)}\,\psi_n{}^{l+1}(0) + \frac{x}{1.2\ldots(l+1)(l+2)}\,\psi_n{}^{l+2}(0) + \ldots$$

и разность

$$\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}$$

приводится къ слѣдующему:

$$\frac{\psi_n{}^l(0)}{1.2\ldots.l}\,\frac{1}{x} + \frac{\psi_n{}^{l-1}(0)}{1.2\ldots(l-1)}\,\frac{1}{x^2} + \ldots\ldots.$$

Умножая это на $A_n x + B_n$, и въ полученномъ произведеніи

$$\frac{A_n\psi_n{}^l(0)}{1.\,2\ldots.\,l} + \left(\frac{B_n\psi_n{}^l(0)}{1.2\ldots.\,l} + \frac{A_n\psi_n{}^{l-1}(0)}{1.2\ldots.\,(l-1)}\right)\frac{1}{x} + \ldots..$$

откинувъ члены съ отрицательными степенями перемѣнной x, мы находимъ, что

$$\mathrm{E}\,(A_n x + B_n)\left(\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}} - \mathrm{E}\,\frac{\psi_n(x)}{x^{l+1}}\right)$$

имѣетъ такую величину:

$$\frac{A_n\,\psi_n{}^l(0)}{1.2\ldots.\,l}\,.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее выраженіе множителя ω_n приводится къ такой формулѣ:

$$\omega_n = (-1)^{n-1} A_n \left(\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_n(x_i) - \lambda_1\,\psi_n{}^l(0)\right).$$

Опредѣливши по этой формулѣ величину множителей

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots\ \omega_{m-1},\ \omega_m,$$

и внеся ихъ въ выраженіе искомаго полинома

$$y = \omega_1\psi_1(x) + \omega_2\psi_2(x) + \ldots\ldots + \omega_{m-1}\psi_{m-1}(x) + \omega_m\psi_m(x),$$

мы находимъ, что оно приводится къ слѣдующему:

$$\begin{aligned} y = A_1 &\left(\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_1(x_i) - \lambda_1\,\psi_1{}^l(0)\right)\psi_1(x) - \\ A_2 &\left(\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_2(x_i) - \lambda_1\,\psi_2{}^l(0)\right)\psi_2(x) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ (-1)^{m-1} A_m &\left(\sum f(x_i)\,\theta(x_i)\,\psi_m(x_i) - \lambda_1\,\psi_m{}^l(0)\right)\psi_m(x) \end{aligned}$$

гдѣ λ_1 постоянная неизвѣстная величина, которая опредѣляется тѣмъ, что здѣсь коеффиціентъ при x^l долженъ имѣть данную величину.

Подобнымъ образомъ найдется выраженіе полинома y и въ томъ случаѣ, когда дано нѣсколько изъ коеффиціентовъ его, а остальные опредѣляются тѣмъ условіемъ, что сумма

$$\sum \frac{1}{2} \left(y - f(x) \right)^2 \theta(x),$$

распространенная на данныя величины перемѣнной x, имѣетъ *наибольшую* или *наименьшую* величину.